www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع : **۸ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان : **۲ / ۶ / ۱۳۸۵**	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **دوره‌ی تابستانی** سال **۱۳۸۵**		**اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی**	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**برای هر عدد طبیعی n، با استفاده از استقرای ریاضی درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:** $(1+\sqrt{2})^n \geq 1+\sqrt{2}\,n$	۱/۵
۲	**با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصلضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است .**	۱
۳	**کدام یک از عبارات زیر درست وکدام یک نادرست است. درصورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.** **الف) توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است .** **ب) اگر x گنگ باشد آنگاه x^2 گویاست .**	۱
٤	**برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید :** $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$	۱
۵	**برای اینکه در یک مدرسه دست کم ۶ دانش آموز در یکی از ماههای سال متولد شده باشند این مدرسه حداقل باید چند دانش آموز داشته باشد ؟**	۱
٦	**با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید :** $(A \cup B) - B = A - B$	۱/۲۵
۷	**اگر** $A = \{x \mid x \in N \wedge (x \leq 3\}$ **و** $B = \{x \mid \in N \wedge 1 \leq x \leq 2\}$ **باشد عضوهای مجموعه** $A^2 - A \times B$ **را مشخص کنید و نمودار آنرا رسم کنید.**	۱/۵
۸	**رابطهٔ R روی** $(z - \{0\})^2$ **بصورت مقابل تعریف شده است:** $(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2}$ **الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم ارزی است.** **ب) کلاس هم ارزی $[(2 , 3)]$ را مشخص کنید.**	۱/۷۵
۹	**را بطهٔ R روی مجموعهٔ R به صورت** $R = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \ , \ x \leq y\}$ **تعریف شده است نمودار رابطهٔ R را در دستگاه مختصات رسم کنید.**	۱
۱۰	**یک سکه و یک تاس سالم را با هم می اندازیم مطلوبست تعیین :** **الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی.** **ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.** **ج) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.** **د)** $A' \cup B'$.	۲
	«ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم»	

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع : **۸ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان : **۲ / ۶ / ۱۳۸۵**	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **دوره‌ی تابستانی** سال **۱۳۸۵**		**اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی**	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	از بین ۵ دانش آموز سال اول و ۷ دانش آموز سال دوم به تصادف یک تیم چهار نفره انتخاب می کنیم مطلوبست محاسبهٔ احتمال اینکه لااقل ۳ نفر آنها سال دوم باشد .	۱/۲۵
۱۲	اگر $S=\{a,b,c,d\}$ یک فضای نمونه ای باشد مطلوبست محاسبه $P(a')$ و $P(b')$ در صورتیکه داشته باشیم: $P(c)=P(d)=\frac{۱}{۴}$ و $P(a)=۲P(b)$	۱/۷۵
۱۳	نقطهٔ (x,y) را درون فضای نمونه ای $S=\{(x,y)\in R^۲ \mid ۰\le x\le ۱\ ,\ ۰\le y\le ۲\}$ به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه نقطه‌ی مورد نظر در $A=\{(x,y)\in R^۲ \mid x\le y\le x+۱\}$ باشد را تعیین کنید.	۱/۷۵
۱۴	احتمال اینکه دانش آموزی در درس جبر و احتمال قبول شود ۳۴٪ و در درس حسابان قبول شود ۲۳٪ است و احتمال اینکه دست کم در یکی از این دو درس قبول شود ۳۸٪ است احتمال اینکه این دانش آموز در هر دو درس قبول شود چقدر است؟	۱/۲۵
۱۵	اگر داشته باشیم $A\subseteq B$ آنگاه ثابت کنید: $P(B-A)=P(B)-P(A)$	۱
	«موفق باشید» *جمع نمره*	۲۰

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : **۲ / ٦ / ۱۳۸۵**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **دوره‌ی تابستانی** سال **۱۳۸۵**	**اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی**

ردیف	**راهـــنمای تصحیـــــح**

۱

$\begin{cases} P(1): (1+\sqrt{2})^1 \geq 1+\sqrt{2}(1) & 1+\sqrt{2} \geq 1+\sqrt{2} \quad (0/25) \\ P(K): (1+\sqrt{2})^K \geq 1+\sqrt{2}\,K & (0/25) \end{cases}$

حکم استقرا $P(K+1): (1+\sqrt{2})^{K+1} \geq 1+\sqrt{2}(K+1)$ (۰/۲۵)

طرفین فرض استقرا را در عبارت $(1+\sqrt{2})$ **ضرب می کنیم** (۰/۲۵)

$(1+\sqrt{2})\left((1+\sqrt{2})^K \geq 1+\sqrt{2}\,K\right) \Rightarrow (1+\sqrt{2})^{K+1} \geq (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}\,K) \geq 1+\sqrt{2}(k+1)$ (۰/۲۵)

$(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}\,K) \geq 1+\sqrt{2}(K+1) \Rightarrow 1+\sqrt{2}\,K+\sqrt{2}+2K \geq 1+\sqrt{2}\,K+\sqrt{2} \Rightarrow 2K \geq 0$ (۰/۲۵)

این نامعادله همواره برقرار است پس حکم برقرار است.

۲

$x=2K \quad y=2K+2 \quad z=2K+4 \quad K \in Z$ (۰/۲۵)

$x.y.z = (2K)(2K+2)(2K+4) = 8(K)(K+1)(K+2)$ (۰/۲۵)

K و $K+1$ و $K+2$ سه عدد صحیح متوالی هستند پس یکی از این سه عدد مضرب ۳ است پس(۰/۲۵)

$x.y.z = 8(3q) = 24q$ (۰/۲۵)

۳

الف : نادرست (۰/۲۵) $x=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \quad x^2<x$ (۰/۲۵)

ب: نادرست (۰/۲۵) $x=\sqrt{3+\sqrt{5}} \Rightarrow x^2=3+\sqrt{5}$ (۰/۲۵) **یک عدد گنگ است.**

٤

$xy \leq \left(\frac{(x+y)}{2}\right)^2 \Rightarrow xy \leq \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 4xy \leq x^2+y^2+2xy$ (۰/۲۵)

$x^2+y^2-2xy \geq 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) **بدیهی است**

۵

دوازده ماه سال را لانه های کبوتر در نظر می گیریم برای اینکه در یکی از لانه ها ٦ کبوتر باشد باید در هر لانه حداقل ۵ کبوتر و در یکی از لانه ها ٦ کبوتر داشته باشیم (۰/۲۵)

۵× ۱۲=٦۰ (۰/۲۵) **٦۰+۱=٦۱** (۰/۲۵)

پس حداقل این مدرسه باید ٦۱ دانش آموز داشته باشد (۰/۲۵)

٦

طرف اول $= (A \cup B) - B$

$(A \cup B) \cap B' =$ (۰/۲۵)

$(A \cap B') \cup (B \cap B') =$ (۰/۵)

$(A \cap B') \cup \phi =$ (۰/۲۵)

$A \cap B' =$ (۰/۲۵)

طرف دوم $= A - B$

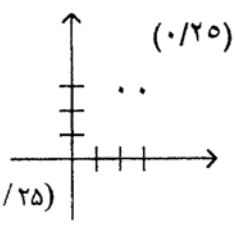
۷

$A=\{2,3\}$ (۰/۲۵) $B=\{1,2\}$ (۰/۲۵)

$A^2 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in A\} \quad A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

$A^2 = A \times A = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$ (۰/۲۵)

$A \times B = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ (۰/۲۵) $A^2 - A \times B = \{(2,3),(3,3)\}$ (۰/۲۵)


(۰/۲۵)

«ادامه در صفحه‌ی دوم»

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : **۲ / ۶ / ۱۳۸۵**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **دوره‌ی تابستانی** سال **۱۳۸۵**	**اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی**

ردیف	**راهنمای تصحیح**

۸

$(x,y)R(x,y) \Leftrightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{x}{y^2}$ (۰/۲۵) **بازتابی**

$\begin{cases} (x,y)R(z,t) \Rightarrow (z,t)R(x,y) & (۰/۲۵) \\ \frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2} \Rightarrow \frac{z}{t^2} = \frac{x}{y^2} & (۰/۲۵) \end{cases}$ **تقارنی**

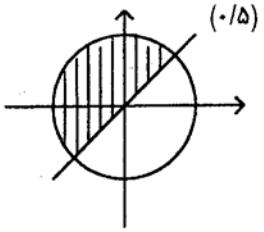
$\begin{cases} (x,y)R(z,t) \text{ و } (z,t)R(e,f) \Rightarrow (x,y)R(e,f) & (۰/۲۵) \\ \begin{cases} \frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2} \\ \frac{z}{t^2} = \frac{e}{f^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{e}{f^2} & (۰/۲۵) \end{cases}$ **ترایایی**

$(x\ ,\ y)\ R\ (۳\ ,\ ۲) \Rightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴x = ۳y^2$ (۰/۰) **نتیجه می گیریم R یک رابطهٔ هم ارزی است .**

۹

$x^2 + y^2 = ۴$

$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ -۲ & ۲ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix}$ (۰/۲۵)



$x \le y$

$x = y \quad \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}$ (۰/۲۵)

۱۰

الف : S = { (ر , ۱), (ر , ۲), (ر , ۳), (ر , ۴), (ر , ۵), (ر , ۶), (پ , ۱), (پ , ۲), (پ , ۳), (پ , ۴), (پ , ۵), (پ , ۶)} (۰/۵)

ب : A = { (ر , ۲), (ر , ۴), (ر , ۶), (پ , ۲), (پ , ۴), (پ , ۶), (ر , ۱), (ر , ۳), (ر , ۵) } (۰/۵)

ج : B= {(ر , ۲), (ر , ۴), (ر , ۶)} (۰/۲۵)

د : A' = {(پ , ۱), (پ , ۳), (پ , ۵) } (۰/۲۵)

B' = {(پ , ۱), (پ , ۲), (پ , ۳), (پ , ۴), (پ , ۵), (پ , ۶), (ر , ۱), (ر , ۳), (ر , ۵) } (۰/۲۵)

$A' \cup B'$ = {(پ , ۱), (پ , ۲), (پ , ۳), (پ , ۴), (پ , ۵), (پ , ۶), (ر , ۱), (ر , ۳), (ر , ۵) } (۰/۲۵)

۱۱

$n(s) = \binom{۱۲}{۴}$ (۰/۲۵)

$n(A) = \binom{۷}{۳}\binom{۵}{۱} + \binom{۷}{۴}\binom{۵}{۰}$ (۰/۵)

$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\binom{۷}{۳}\binom{۵}{۱} + \binom{۷}{۴}\binom{۵}{۰}}{\binom{۱۲}{۴}}$ (۰/۵)

«ادامه در صفحه‌ی سوم»

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : **۲ / ۶ / ۱۳۸۵**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **دوره‌ی تابستانی** سال **۱۳۸۵**	**اداره کل سنجش وارزشیابی تحصیلی**

ردیف	راهـــنمای تصحیـــــح

۱۲

$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$ (۰/۲۵)

$۲P(b)+P(b)+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$ (۰/۲۵)

$۳P(b)+\frac{۱}{۲}=۱$

$۳P(b)=\frac{۱}{۲}$ $p(b)=\frac{۱}{۶}$ (۰/۵)

$P(a)=۲P(b)=۲\left(\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵)

$P(a')=۱-P(a)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$ (۰/۲۵)

$P(b')=۱-P(b)=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$ (۰/۲۵)

۱۳

$S=[۰,۱]\times[۰,۲]$

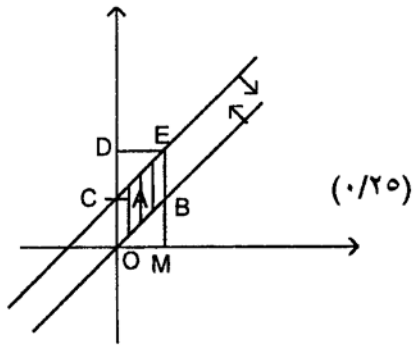
$\begin{cases} x \le y & (۰,۰) \quad (۱,۱) \\ y \le x+۱ & (۰,۱) \quad (-۱,۰) \end{cases}$ (۰/۲۵)

$a(s)=۱\times۲=۲$ (۰/۲۵)

$a(A)=a(s)-[a(O\overset{\Delta}{M}B)+a(C\overset{\Delta}{D}E)]$

$a(A)=۲-\left[\frac{۱\times۱}{۲}+\frac{۱\times۱}{۲}\right]$ (۰/۵)

$a(A)=۲-۱=۱$ (۰/۲۵) $P(A)=\frac{a(A)}{a(s)}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

۱۴

$P(A)=۰/۳۴$ $P(B)=۰/۲۳$ $P(A\cup B)=۰/۳۸$ (۰/۲۵) $P(A\cap B)=?$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (۰/۲۵)

$۰/۳۸=۰/۳۴+۰/۲۳-P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=۰/۳۴+۰/۲۳-۰/۳۸$ (۰/۲۵)

$P(A\cap B)=۰/۵۷-۰/۳۸$ (۰/۲۵)

$P(A\cap B)=۰/۱۹$ (۰/۲۵)

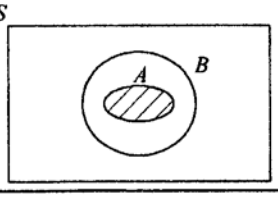
۱۵

با استفاده از شکل می دانیم (۰/۲۵) $B=(B-A)\cup A$ **همچنین** $A\cap(B-A)=\phi$ **می باشد. در نتیجه داریم**

$P(B)=P\big((B-A)\cup A\big)$ (۰/۲۵)

$P(B)=P(B-A)+P(A)$ (۰/۲۵)

$P(B-A)=P(B)-P(A)$ (۰/۲۵)



جمع نمره ۲۰

مصححین محترم لطفاً برای راه حلهای درست دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.

www.alm.loxblog.com